Exercice N°1

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt \ , \ n \in IN^* \end{cases}$

1/ a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1 par une intégration par parties.

2/ En utilisant une intégration par parties, que pour tout n ∈ IN* on a : $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos t\, dt$.

3/ a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\, I_{n-2}$.

b) En déduire I_2 et I_3. Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2t+t^2-t^3)\sin t\, dt$

1/ a) Calculer I_0.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, dt$$

$$= \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)$$

$$\boxed{I_0 = 1}$$